

## بهره‌گیری از مدل ریاضی - فیزیک در تبیین برخی از پدیده‌های فرهنگی - اجتماعی

محسن شاهرزانی - محمد جواد مرزبان

### چکیده

هنگامی که قطره‌ای جوهر روی سطح آب قرار گیرد، ذرات جوهر با محیط خود برهم‌کنش نموده و در نهایت یک حرکت نامنتظم ایجاد می‌شود. هر ذره جوهر با دیگر ذرات از طریق فعل و انفعالات خاصی رابطه برقرار می‌کند. مجموعه‌ای از تصادمها و برخورد‌ها و تعاملات و تغییرات سینم را به سمت و سوی خاصی سوق می‌دهد. اگر چه این تعاملات، کاملاً غیرمنتظم و تصادفی (random) می‌باشد، اما سرنوشت این سامانه بی‌نظم در سطح کلان قابل پیش‌بینی و تحلیل است. هر ذره در این سامانه با ذرات دیگر وارد تعامل شده و با برقراری ارتباط معنا دارد تعریف شده. اطلاعاتی را رد و بدل می‌کند، اطلاعات در محیط با نرخ و سرعتی معین و ظرف مدت و زمانی مشخص انتشار می‌یابد، تا سرانجام سامانه به تعادل و پایداری برسد یا در آستانه تحول قرار گیرد. آنچه در بالا گفته شده همان ماجرای است که در جامعه انسانی، هنگام پخش اطلاعات و شایعه اتفاق می‌افتد، در واقع جریان اطلاعات در یک جامعه و برهم‌کنشهای سامانه جوهر-آب را تحت عنوان یک مدل ریاضی - فیزیک خاص می‌توان مورد بررسی قرار داد.

استفاده از مدل ریاضی مناسب به ما امکان می‌دهد که بتوانیم چگونگی انتشار اطلاعات و پخش شایعه را در محیط اجتماع بررسی نماییم، چنین مدل‌هایی کاربردهای بسیار مهم و با ارزشی در مسائل امنیتی - فرهنگی - سیاسی خواهد داشت. به عنوان مثال می‌توان از طریق یک مدل ریاضی مناسب، تحولات فرهنگی در جامعه را به صورت کتی عددی مورد بررسی قرار داده آینده این تحولات را پیش‌بینی نمود. در این مقاله با ارائه مثال‌های مختلف اهمیت مدل‌سازی ریاضی را در حوزه‌های مختلف علوم، مورد بررسی و تأکید قرار داده‌ایم.

کلید واژه‌ها: تابع نمایی، تابع رشد لجستیک، مدل‌های رشد و زوال، مدل‌سازی ریاضی

## ۱- معرفی

یکی از عناصر اساسی و مهم پژوهش در علوم اجتماعی مدل‌سازی و شاخص‌سازی می‌باشد. زمانی که سخن از مفاهیم می‌شود شاخص‌سازی نیز در درون آن جای دارد. هر چند در موارد معدودی تحقیق بی‌واسطه نیز ممکن است، اما در بیشتر موارد باید کار تحقیق را از طریق شاخصها انجام داد. باید واقعیت را با نشانه‌هایی از شناخت که از سویی به درستی معرف آن باشند و از سوی دیگر خود در شناخت آن، واقعیتها و انحراف پدید نیاورند.

به دست آوردن شاخصها در واقع پیدا کردن ملاک‌هایی است، که برخی مفاهیم کیفی را در قالب کمیات مطرح کرده و با ابزار قابل سنجش مانند عدد و تابع که از مفاهیم اولیه ریاضیات می‌باشند، بیان نمود. البته این موضوع تنها دغدغه دانشمندان علوم انسانی و اجتماعی نبوده و نیست. برخی از فلاسفه بزرگ نیز در برخی تحریرهای خود سخن از ریاضیات عمومی برده‌اند. مثلاً رنه دکارت فیلسوف فرانسوی (۱۵۹۶ - ۱۶۵۰) می‌گوید:

«... چون ملاحظه کردم که از میان همه کسانی که تاکنون در علوم طلب حقیقت کرده‌اند تنها ریاضیدانها به براهین پی برده، یعنی دلایل محقق و بدیهی به دست آورده‌اند شک نمی‌کردم که در همان امور که آنان در نظر گرفته‌اند، باید آغاز کنم... اما برای این مقصود بنا نگذاشتم که جمیع فنون خاصی را که عموماً ریاضیات می‌خوانند، فراگیرم و نظر به اینکه با وجود اختلاف، موضوعات همه با هم موافقت دارند از آن جهت که تنها منظور علوم مزبور نسبت و تناسب موجود در آن موضوعات است، دیدم بهتر آن است که تناسب را به طور کلی در نظر گیرم و فقط در موضوعاتی که بتواند معرفت آنها را برای من سهل تر کند. اما آن تناسب را

محصور و محدود به آن موضوعات دانم تا بتوانم بعداً به هر چیز دیگری که در خور باشد، شامل نمایم.<sup>۲</sup>

این عبارتها مؤید آن است که کمتی کردن برخی مفاهیم با استفاده از ابزار ریاضیات، مقصود بسیاری از اندیشمندان گذشته و حال بوده و هست. ما می‌دانیم که مدل‌سازی ریاضی در علومى مانند فیزیک، شیمی و مهندسی کاربرد بسیار دارد. خواننده علاقه‌مند می‌تواند نمونه‌هایی از این قیل را در کتابهای مدل‌سازی ریاضی مطالعه نماید و با مدل‌های پیوسته<sup>۱</sup>، گسته<sup>۲</sup>، متاوب<sup>۳</sup> و اعداد تصادفی<sup>۴</sup> آشنا شود.<sup>۵</sup> اما از جمله مدل‌های ریاضی که در مطالعات جمعیت‌شناسی و علوم اجتماعی کاربرد فراوان دارند، مدل‌های رشد لجستیک<sup>۶</sup> می‌باشد، که در مدل‌های جمعیت ایستا و پایدار، رشد و زوال عمر، باروری و جدول عمر مورد استفاده قرار می‌گیرند.<sup>۷</sup> در ادامه به معرفی برخی مفاهیم و نمادهای ریاضی مورد نیاز در این بحث می‌پردازیم.

## ۲- عدد نپر توابع نمایی

یکی از اعداد غیرجبری و اصم که در ریاضیات محض و کاربردی نقش مهمی دارد عدد  $e$  می‌باشد، که به آن عدد نپر می‌گویند. این عدد حد عبارت  $(1 + \frac{1}{x})^x$  است، هنگامیکه  $x$  به طور بیکران افزایش پیدا کند. این به افتخار ریاضیدان سوئیسی لئونارد اویلر<sup>۸</sup> (۱۷۰۷-۱۷۸۳) عدد  $e$  نامیده می‌شود و مقدار آن را می‌توان با دقت

<sup>۱</sup> Continuous Models

<sup>۲</sup> Discrete Models

<sup>۳</sup> Periodic Models

<sup>۴</sup> Modeling with random number

<sup>۵</sup> Logistic growth

<sup>۶</sup> Euler, Leonardo

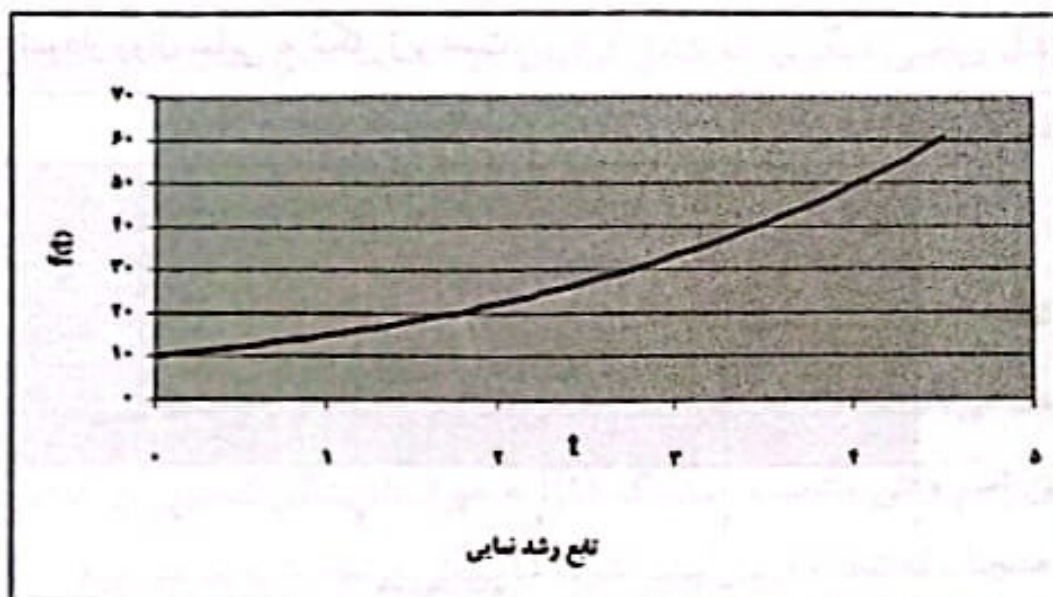
دلخواهی محاسبه کرد. در محاسبات معمولی عدد  $e$  را برابر  $2/7$  می گیرند. از جمله تعاریفی که برای عدد  $e$  شده است، کاربرد اقتصادی آن است. از نقطه نظر اقتصادی هرگاه یک واحد پول را در یکسال با نرخ صددرصد به مرابه بگذارند و سود را به طور پیوسته محاسبه نمایند، مبلغ بازپرداخت با عدد  $e$  برابر است. با استفاده از عدد  $e$  می توان تابع نمایی را به صورت  $f(x) = e^x$  تعریف کرد. این تابع در مسائل مختلف ریاضیات، مهندسی و فیزیک کاربرد دارد. مثلاً جواب معادلاتی مانند حرارت و موج به صورت ترکیبی از تابع نمایی است.<sup>۱</sup> این تابع دارای ویژگیهای مقدماتی است که خواننده علاقه مند می تواند خواص آن را در مرجع<sup>۲</sup> مطالعه نماید. همچنین معکوس این تابع لگاریتم طبیعی نام دارد که با  $f(x) = \ln x$  نمایش داده می شود.

### ۳- چگونگی ارائه مدل:

مدلهای ریاضی که شامل توانهایی از  $e$  هستند در خیلی از رشته ها وجود دارند. بعضی از این مدلها را رشد نمایی یا زوال نمایی می گویند. تابعی که با ضابطه

$$(f(t) = Be^{kt} \dots \dots \dots t \geq 0)$$

تعریف می شود که در آن  $B$  و  $k$  ثابتهای مثبت هستند، تابع بالا دارای رشد نمایی است که نمودار آن به شکل زیر است:



مثال زیر برای رشد نمایی از زیست شناسی انتخاب شده است.

مثال: نشان داده شده است که در کشت خاصی از باکتری اگر  $f(t)$  تعداد

باکتریهای موجود در  $t$  دقیقه باشد، آنگاه  $f(t) = 1500e^{0.04t}$  می‌باشد. اگر  $t=0$

یعنی در زمان شروع کشت باکتری  $f(0) = 1500$  است، یعنی تعداد باکتریها یا

همان ثابت  $B$  در زمان شروع کشت ۱۵۰۰ بوده است. در این صورت پس از یک

ساعت (۶۰ دقیقه) تعداد باکتریها چند تا است؟

$$f(60) = 1500e^{0.04 \cdot (60)} = 1500e^{2.4} = 16535$$

همچنین تابعی را که با ضابطه

$$f(t) = Be^{-kt} \dots\dots\dots (t \geq 0)$$

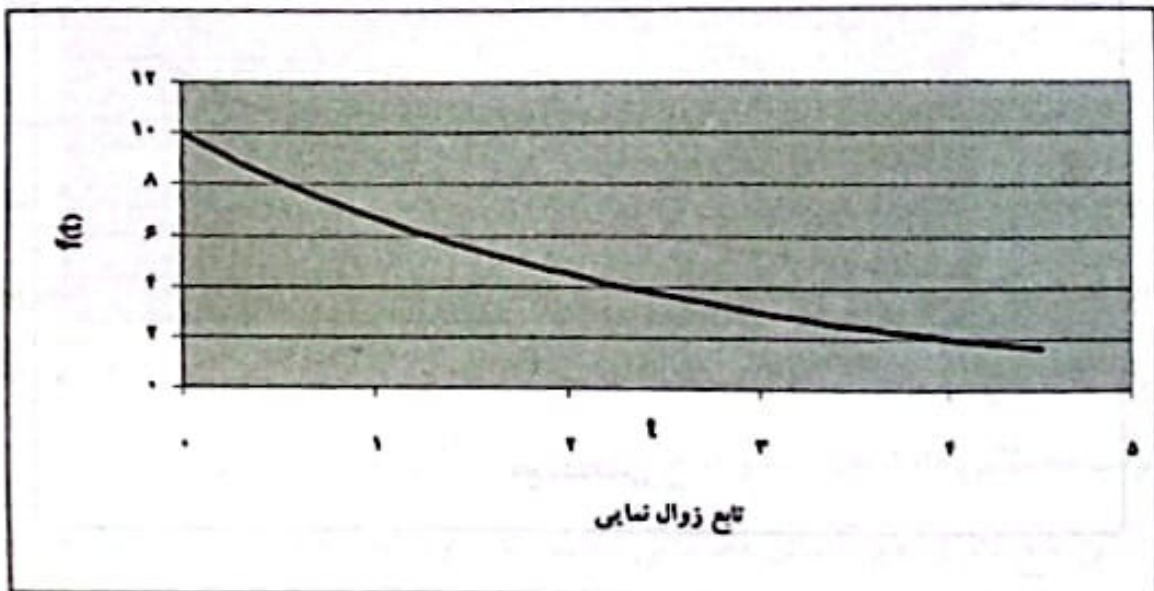
تعریف می شود (که در آن  $B$  و  $k$  ثابتهای مثبتی هستند)، زوال نمایی می نامند.

زوال نمایی وقتی پیش می‌آید که آهنگ کاهش کمیتی با اندازه‌اش متناسب

شود. مثلاً از نماها اینچنین نتیجه‌گیری می‌شود که آهنگ کاهش رادیوم با مقدار

رادیوم موجود، در آن لحظه متناسب است.

نمودار زوال نمایی به شکل زیر است:



مدل ریاضی: زوال نمایی کاربردهای فراوان در علوم مختلف دارد. مثال زیر از علم اقتصاد انتخاب شده است که در آن بهای کالایی به طور نمایی کاهش پیدا می‌کند.

مثال: اگر  $V(t)$  بهای کالایی بعد از  $t$  سال از زمان خرید باشد، آنگاه

$$V(t) = Be^{-0.2t}$$

که در آن  $B$  یک مقدار ثابت است. اگر قیمت خرید این کالا ۸۰۰۰ تومان باشد، بهای آن بعد از دو سال چقدر خواهد بود؟

حل: چون قیمت خرید ۸۰۰۰ تومان است، پس  $V(0) = B = 8000$  یعنی

$$V(t) = 8000e^{-0.2t}$$

پس برای  $t=2$  داریم:

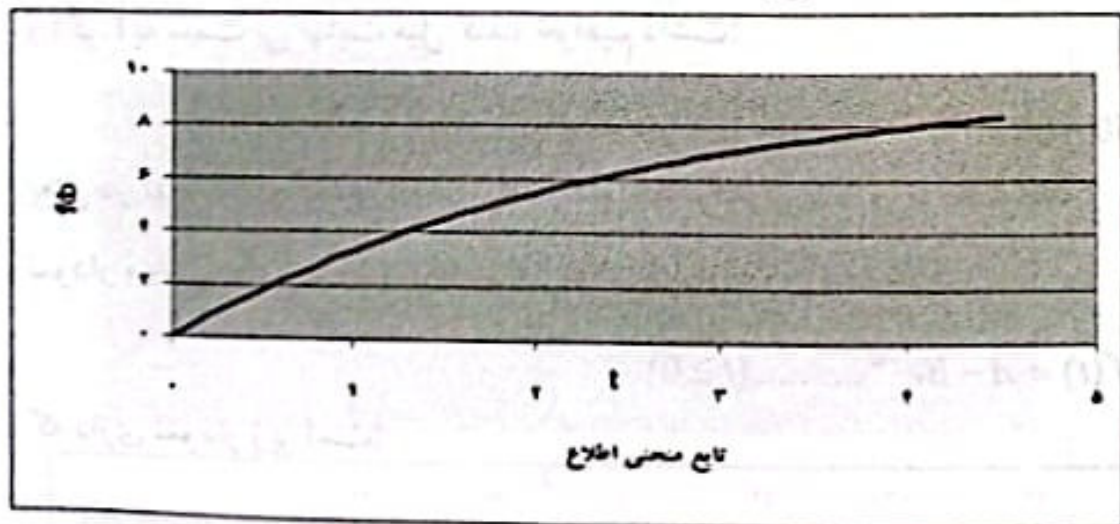
$$V(t) = 8000e^{(-0.2) \cdot (2)} = 8000e^{(-0.4)} = 5362.56$$

مدل ریاضی دیگری که شامل توانهایی از  $e$  است؛ تابعی است که با ضابطه زیر تعریف می‌شود:

$$F(t) = A(1 - e^{-Kt}) \dots (t \geq 0)$$

که در آن  $A$  و  $K$  اعداد ثابت و مشخصی هستند. این تابع رشد کراندار را توصیف می‌کند و به آن منحنی اطلاع<sup>۶</sup> می‌گویند.

این اسم وقتی مناسب است که  $f(t)$  به عنوان شایستگی شخصی در انجام کار باشد. همچنان که تجربه فردی بیشتر شود، شایستگی او نخست به سرعت زیاد می‌شود و سپس این سرعت کاهش می‌یابد و افزایش تجربه اثر کمی در مهارت انجام کار دارد. نمودار منحنی اطلاع به شکل زیر است:



مثال: کارگر کارخانه‌ای می‌تواند  $f(t)$  واحد از کالایی را در یک روز بعد از  $t$  روز، شروع به کار تولید نماید که در آن

$$f(t) = 50(1 - e^{-0.34t})$$

الف) چند واحد از کالا را روزانه می تواند تولید نماید، وقتی که ۷ روز از شروع به کار گذشته باشد؟

ب) این کارگر در پایان چند واحد از کالا را روزانه می تواند تولید نماید؟

حل: برای الف می خواهیم  $f(t)$  را حساب کنیم:

$$f(7) = 50(1 - e^{(-0.34) \cdot (7)}) = 50(1 - e^{-2.38}) = 50(1 - 0.093) = 45$$

پس کارگر بعد از ۷ روز از شروع به کار، روزانه می تواند ۴۵ واحد از کالا را

تولید نماید. برای (ب) چون

$$f(t) = 50(1 - e^{-0.34t}) = 50 - 50e^{-0.34t}$$

و اگر  $t$  به سمت بی نهایت میل کند، خواهیم داشت:

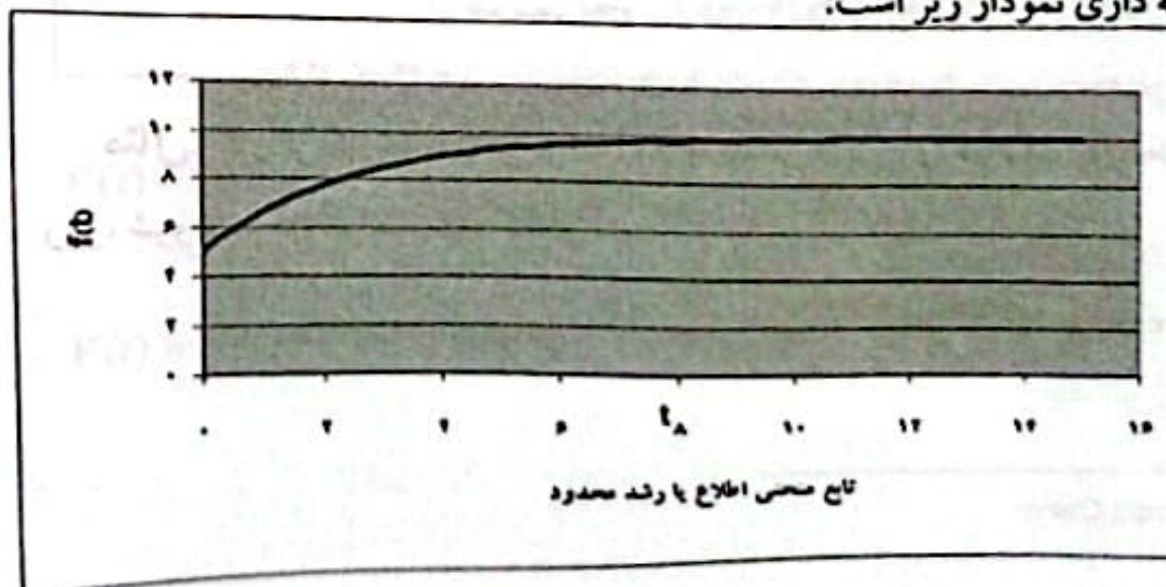
$$50 - 50e^{(-0.34) \cdot (\infty)} = 50 - 0 = 50$$

یعنی در نهایت کارگر روزانه می تواند ۵۰ واحد تولید از کالا را تولید نماید.

نمودار منحنی اطلاع یا رشد محدود می تواند با ضابطه زیر بیان شود:

$$f(t) = A - Be^{-kt} \dots\dots\dots (t \geq 0)$$

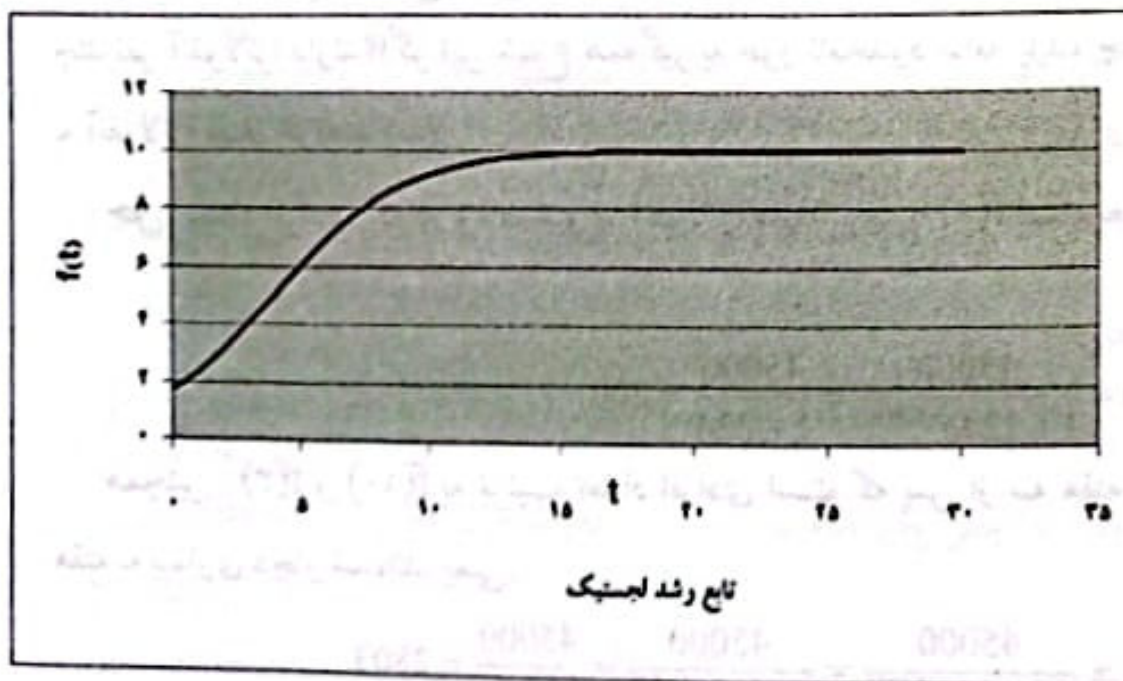
که داری نمودار زیر است:



اکنون رشد جمعیتی را در نظر بگیرید که تحت تأثیر محیط خودش که اندازه‌اش یک کران بالاست، می‌باشد. مثلاً فضا یا تولید مثل می‌تواند عاملی باشد که به وسیله محیط محدود می‌شود. در چنین حالاتی یک مدل ریاضی مناسب که در عوامل محیطی مورد استفاده قرار می‌گیرد، تابعی است که با ضابطه:

$$f(t) = \frac{A}{1 + Be^{-kt}} \dots\dots\dots (t \geq 0)$$

تعریف می‌شود که در آن  $A$ ،  $B$  و  $k$  ثابت‌های مثبت هستند. نمودار این تابع در زیر رسم شده است که به آن منحنی رشد لجستیک می‌گویند. اگر  $k$  کوچک باشد، این منحنی شبیه نمودار رشد نمایی است و اگر  $k$  زیاد شود این منحنی شبیه منحنی رشد محدود است.



یک کاربرد رشد لجستیک در اقتصاد، توزیع اطلاعات درباره فرآورده‌های خاصی است. این تابع می‌تواند در زیست‌شناسی در توصیف سرایت یک بیماری

به صورت همه گیر و در جامعه شناسی در توصیف انتشار یک شایعه مورد استفاده قرار گیرد.

#### ۴- مثال کاربردی

برای توصیف بیشتر رشد لجستیک، می توان مثالهای زیر را مورد نظر قرار داد:  
مثال ۱: در یک جامعه معینی سرایت آنفولانزای خاصی طوری است که بعد از  $t$  هفته،  $f(t)$  شخص مبتلا به مرض آنفولانزا می شوند که

$$f(t) = \frac{45000}{1 + 224e^{-0.9t}}$$

چند نفر از مردم در موقع شیوع آنفولانزا دارند؟ بعد از ۳ هفته و بعد از ۱۰ هفته  
چند نفر آنفولانزا دارند؟ اگر این شیوع همه گیر به طور نامحدود ادامه یابد، چند نفر  
به آنفولانزا مبتلا خواهند شد؟

حل: تعداد افرادی که در زمان شیوع، آنفولانزا دارند برابر با  $f(0)$  است یعنی:

$$f(0) = \frac{45000}{1 + 224e^{-0.9(0)}} = \frac{45000}{1 + 224} = 200$$

همچنین  $f(3)$  و  $f(10)$  به ترتیب تعداد افرادی است که پس از سه هفته و دو هفته به بیماری دچار شده اند. یعنی:

$$f(3) = \frac{45000}{1 + 224e^{-0.9(3)}} = \frac{45000}{1 + 224e^{-2.7}} = \frac{45000}{16.054} = 2803$$

$$f(10) = \frac{45000}{1 + 224e^{-0.9(10)}} = \frac{45000}{1 + 224e^{-9}} = \frac{45000}{1.02764} = 43790$$

اگر این بیماری همه گیر کنترل نشود و به طور نامحدود ادامه داشته باشد، یعنی  $t$  به سمت بی‌نهایت میل کند، تعداد مبتلایان به آنفلانزا به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$f(\infty) = \frac{45000}{1 + 224e^{-0.99 \cdot \infty}} = \frac{45000}{1 + 0} = 45000$$

مثال ۲: در شهری که تعداد جمعیت آن  $A$  نفر بود، ۲۰ درصد اهالی، از رادیو یک تبلیغ سیاسی را در یک آگهی شنیدند. بعد از  $t$  ساعت  $f(t)$  نفر این تبلیغ را شنیدند که در آن

$$f(t) = \frac{A}{1 + Be^{-At}}$$

اگر در مدت یک ساعت، ۵۰ درصد جمعیت این مطلب را شنیده باشند، چه مدت طول می‌کشد تا ۸۰ درصد جمعیت این تبلیغ را بشنوند؟

حل: برای  $t=0$  داریم:

$$f(0) = 2A = \frac{A}{1+B} \rightarrow 0.2A + 0.2AB = A \rightarrow B = \frac{0.8}{0.2} = 4$$

یعنی:

$$f(t) = \frac{A}{1 + 4e^{-At}}$$

برای  $t=1$  یعنی یک ساعت بعد ۵۰ درصد جمعیت مطلب را شنیده‌اند، یعنی:

$$f(1) = 0.5A$$

پس:

$$0.5A = \frac{A}{1+4e^{-4k}} \rightarrow 0.5A + 2Ae^{-4k} = A \rightarrow 2Ae^{-4k} = 0.5A$$

$$\rightarrow e^{-4k} = 0.25 \rightarrow -4k = \ln(0.25) \rightarrow 4k = \ln(0.25)^{-1} \rightarrow 4k = \ln 4$$

$$\rightarrow k = \frac{\ln 4}{4} = \frac{1.3863}{4}$$

و برای  $t=2$  یعنی دو سال بعد  $f(2)=0.8A$  می باشد، یعنی:

$$0.8A = \frac{A}{1+4e^{-\frac{1.3863}{4} \cdot 4t}} \rightarrow 0.8A + 3.2Ae^{-1.3863t} = A \rightarrow 3.2e^{-1.3863t} = 0.2$$

$$e^{-1.3863t} = \frac{0.2}{3.2} = 0.0625 \rightarrow -1.3863t = \ln(0.0625) = -2.7726 \rightarrow t = 2$$

**مثال ۳:** روزی که ۵۰۰۰ دانشجو در محوطه دانشگاه حضور داشتند، دانشجویی شایعه‌ای را شنید. این شایعه دهن به دهن گشت. بعد از  $t$  دقیقه،  $f(t)$  نفر شایعه را شنیدند که در آن:

$$f(t) = \frac{5000}{1+4999e^{-0.5t}}$$

بعد از ۱۰ دقیقه و بعد از ۲۰ دقیقه چند نفر این شایعه را خواهند شنید؟ در نهایت چند نفر این شایعه را خواهند شنید؟

**حل:** پس از ۱۰ دقیقه تعداد افرادی که شایعه را شنیده‌اند، عبارت است از:

$$f(10) = \frac{5000}{1+4999e^{(-0.5)(10)}} \cong 144$$

و پس از ۲۰ دقیقه تعداد افرادی که شایعه را شنیده‌اند، برابر است با:

$$f(20) = \frac{5000}{1+4999e^{(-0.5)(20)}} \cong 4075$$

با محاسبه نشان داده می‌شود که پس از حدود ۳۴ دقیقه کل جامعه آماری این  
شايعه را خواهد شنيد.

### ۵- نتیجه‌گیری

کمی کردن برخی از مفاهیم کیفی با ابزار ریاضیات امکانپذیر است. از جمله  
می‌توان میزات تأثیرگذاری افکار عمومی یک جامعه را تحت تأثیر انتشار یک شايعه  
مورد ارزیابی و سنجش قرار داد. در این مقاله مشاهده شد که این گونه مسائل را  
می‌توان با مدل‌های ریاضی موسوم به مدل‌های لجستیک ارائه کرد که به‌صورت  
ترکیبی از توابع نمایی قابل بیان و اندازه‌گیری می‌باشند.  
البته ثابت‌های موجود در مدل‌های لجستیک مانند  $A$  و  $B$  و  $K$  در جوامع مختلف  
با یکدیگر تفاوت دارند که برای شناخت هر یک بر اساس تنوع جامعه مورد مطالعه  
شود و این ثابت‌ها از سوی کارشناسان اندازه‌گیری و مورد استفاده قرار گیرند.

## منابع

۱. ساروخانی، باقر؛ (۱۳۸۵). روشهای تحقیق در علوم اجتماعی. جلد دوم. ص ۸۹ نشر دیدار، چاپ دوم
۲. فروغی، محمد علی؛ (۱۳۷۲). سیر حکمت در اروپا. چاپ سوم. تهران: انتشارات زوار.
- r-Dilwyn Edwards; Mathematical Modeling skills; ۱۹۹۶; Macmillan Press
۴. ارج، پولاد؛ (۱۳۸۵). روشهای تحلیل جمیعت؛ مترجم: ع. ر. آیت اللهی. چاپ اول. شیراز: انتشارات دانشگاه شیراز.
۵. لویس لیتولد؛ (۱۳۸۸). ریاضیات پیش دانشگاهی. جلد اول. مترجم: خلیل پاریاب. چاپ اول. تهران: انتشارات پاریاب.
۶. شیدفر، عبا...؛ (۱۳۷۲). ریاضیات مهندسی. چاپ اول. تهران.